الاحصائي
حسين علي عبدالله اليعقوبي
مدير الإحصاء والتخطيط الجامعي
جامعة ذي قار - العراق

## بعض المفاهيم الأساسية اختبار الفرضيات

الفرض الإحصائي:-

يجب أولا التمييز بين الفرضيات العلمية والفرضيات الإحصائية ، حيث أن الفرضية العلمية هي حل مقترح لمشكله يصاغ بشكل استنتاجي كتخمين يستند على معلومات علمية سابقة وتقرر صحة الفرضية العلمية أو أخطأها في ضوء الخبرة والتجربة ، أما الفرضية الإحصائية فهي ادعاء أو إفادة أو مقوله أو تصريح تتعلق بالتغيرات العشوائية لتوزيع احتمالي والتي يمكن مشاهدتها . فمثلا إذا فرضنا أن متوسط المجتمع $M=15$ وان نسبة الوحدات المعيبة في الإنتاج $P=0.03$ وان تباين المجتمع $\sigma^2 = 14$ فهذه جميعها فرضيات إحصائية ويرمز لها بالرمز H . وتنقسم الفرضيات الإحصائية عاده إلى قسمين :

١- الفرض البسيط :- وهو الفرض الذي يحدد ويعرف التوزيع الإحصائي للمتغيرات العشوائية تحديداً كاملا ، مثلاً متوسط المجتمع $M=15$ .
٢- الفرض المركب :- وهو الفرض الذي لا يمكن تحديد التوزيع الإحصائي للمتغير العشوائي تحديد كاملا ، مثلاً متوسط المجتمع $M>15$ .

## صياغة الفروض الاحصائية

في اختبارات الفروض الاحصائية هنالك فرضان احدهما يسمى فرض العدم والاخر الفرض البديل

١- فرض العدم:- ويعرف بانه صيغة مبدئية عن معلمة( او معالم ) المجتمع المجهول . وهو الفرض الذي يرغب الباحث باختياره لانه غالبا ما يشير الى عدم وجود اختلاف بين المجموعات او الفئات او عدم وجود علاقة بين المتغيرات ويتوقع الباحث عادة خطأ هذا الفرض مما يستوجب رفضه . وعادة ما يقوم الباحثين في كافة مجالات العلوم المختلفة بوضع فرض معين وتكون مهمة الاحصائي مساعدتهم في اتخاذ القرار المناسب بقبول او رفض هذا القرار .
٢- الفرض البديل :- ويعرف بأنه صيغة مبدئية تشير الى نفس المعلمة المجهوله لها قيمة تختلف عن القيمة التي حدودها فرض العدم . وهو الفرض الذي لا يخضع للاختبار الاحصائي حيث يتم قبوله اذا ما تم رفض فرض العدم من قبل الباحث . وهذا يعني بانه يوجد دائما فرض بديل لفرض العدم عند اختباره

. وان رفـض فـرض العـدم يعنـي قبـول الفـرض البـديل والعكـس صـحيح
.والفرض البديل يمكن ان يصاغ باحدى الطريقتين ، طريقة غير متجهه أو طريقة متجهه.

الطريقة غير المتجهه تكون محايدة وتختلف عن فرض العدم بغض النظر عن كون هذه القيمة اعلى او ادنى عن القيمة المفروضة في فرض العدم ، مثلا ان متوسط درجات الطلاب في مادة الاحصاء تختلف عن ٧٠ أي نضع الفرض البديل كالاتي $H_1 : M \neq 70$

اما الطريقة المتجهه فتهتم بكون قيمة المعلمة أما اكبر من او اصغر من القيمة المقترحة من فرضية العدم . مثلا ان متوسط درجات الطلاب في مادة الاحصاء اكبر من ٧٠ وفي هذه الحاله تصاغ الفرض البديل كلاتي $H_1 : M > 70$ ، او متوسط درجات الطلاب في مادة الاحصاء اقل من ٧٠ فتصاغ كالاتي $H_1 : M < 70$

من هذا نلاحظ ان الطريقة الاولى (غير المتجهه) لم تحدد اجاها معيناً للفرق بين المتوسط والقيمة التي حدودها فرض العدم لذا فان الاختبار يسمى اختبار من طرفين اما في الحالتين السابقتين للطريقة الثانية (المتجهة ) يسمى الاختبار اختبار من طرف واحد .

## ألاختبار الاحصائي

هو تقسيم الحالات الممكنة لقيم المتغير العشوائي (فضاء العينةS) الى منطقتين منطقة رفض واخرى منطقة قبول

- منطقة الرفض(المنطقة الحرجة ) :- هي المنطقة التي تحتوي على قيم الاختبار الاحصائية التي تؤدي الى رفض فرض العدم وهي مجموعة جزئية من فضاء العينة .
- منطقة القبول :- هي المنطقة المتبقية من فضاء العينة وفيها يتم عدم رفض فرض العدم .

ويمكن اجراء الاختبار باخذ عينة عشوائية بحجم n فاذا وقعت هذه النقطة في منطقة الرفض نرفض $H_0$ واذا وقعت في منطقة القبول نقبل فرض العدم واختبار الفرضيات يهدف الى اتخاذ قرار حول ما اذا كانت فرض العدم مقبوله او لا وذلك باستخدام مختبر احصائي مناسب .

- المختبر الاحصائي :- وهو متغير عشوائي تستخدم قيمته في اتخاذ قرار برفض او عدم رفض فرض العدم أي هو متغير عشوائي ذو توزيع احتمالي يصف العلاقة بين القيم النظرية للمعلمة والقيم المحسوبة من العينة .

## أنواع الأخطاء الإحصائية

ان اتخاذ أي قرار احصائي ينطوي على خطا بنسبة ما وذلك لانه من المحتمل نرفض فرض في حين انه صحيح او امكانية قبوله عندما يكون خاطئ لهذا فان هنالك نوعين من الاخطاء الاحصائية ، الخطا من النوع الاول والخطا من النوع الثاني وذلك لاعتمادنا في اتخاذ هذا القرار على عينة والعينة هي جزء من الكل

- الخطأ من النوع الأول:- وهو الخطأ الناشئ من رفض فرض العدم وهو صحيح ويرمز لاحتماله بالرمز $\alpha$
- الخطأ من النوع الثاني :- وهو الخطأ الناشئ من عدم رفض فرض العدم وهو خاطئ ويرمز لاحتماله بالرمز $\beta$

ويمكن تلخيص نتائج الاختبار في جدول على النحو الأتي

الحقيقة ( حاله الطبيعة)

| | $H_0$ صحيحة | $H_0$ خاطئة |
|---|---|---|
| القرار// عدم رفض $H_0$ | ✓ | خطا من النوع الثاني |
| القرار// رفض $H_0$ | خطا من النوع الأول | ✓ |

وعادة ما يرمي الباحث بجعل الخطأين $\alpha$ و $\beta$ اقل ما يمكن ، ولكن في حاله ثبات حجم العينة فان أي انخفاض في قيمة إحدى الاحتمالين يؤدي إلى ارتفاع في قيمة الآخر ولا يمكن تقليل الاحتمالين معا إلا بزيادة حجم العينة وقد جرت العادة من قبل الإحصائيين الى حل عملي وهو تثبيت قيمة $\alpha$ (احتمال الخطأ من النوع الاول ) عند مستوى معين سمي مستوى الدلالة أو المعنوية والبحث عن الاحتمال الذي يعطي اقل قيمة إلى $\beta$ أي عند مقرنة عدة اختبارات فاننا نثبت قيمة $\alpha$ لكل منها ونختار الاختبار الذي له اقل قيمة $\beta$ او اكبر قيمة غالى $1-\beta$ ، أي جعل هذه القيمة $(1-\beta)$ قريبة او تساوي من الواحد ، وكلما زادت قيمة $1-\beta$ مع ثبات $\alpha$ أي كلما زادت القوة كلما كان الاختبار افضل وعلى هذا الاساس فاننا نفضل الاختبار ذات القوة الاكبر لذا سميت القيمة $1-\beta$ بقوة الاختبار .

## الخطوات الاساسية في اختبارات الفروض

تعتبر اختبارات الفروض الاحصائية اسلوبا لتحديد ما اذا كانت بيانات العينة تؤدي الى قبول او رفض صياغة مبدئية عن معلمة (او معالم ) المجتمع ويتضمن هذا الاسلوب الخطوات التالية .

١- التعرف على طبيعة البيانات :- قبل البدء بعملية الاختبار يتطلب التعرف على طبيعة البيانات الاحصائية هل انها نوعية ام كمية ؟متصله ام متقطعة؟ وبعد معرفة نوعية البيانات يتطلب التعرف على طبيعة التوزيع الذي جاءت منه هذه البيانات هل هو توزيع طبيعي او غير طبيعي ؟ هل هي مستقلة ام لا ؟

٢- صياغة فرض العدم والبديلة :- وضع صيغة مبدئية عن معلمة المجتمع المجهوله كان تكون المعلمة متوسط مجتمع ، نسبة المجتمع ، او تباين المجتمع او قد تكون لعده معالم مجهوله . وتكون على نوعين

- اختبار ذات طرفين

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

- اختبار ذات طرف واحد

$$H_0 : \theta \leq \theta_0$$
$$H_1 : \theta > \theta_0$$

او

$$H_0 : \theta \geq \theta_0$$
$$H_1 : \theta < \theta_0$$

٣- تحديد مستوى المعنوية :-والذي هو عبارة عن احتمال رفض فرض العدم وهو صحيح ويسمى ايضا بمستوى الدلالة ويمثل احتمال الوقوع في خطا من النوع الاول ويرمز له بالرمز $\alpha$ ، وتكون قيمته بين الصفر والواحد وعادة ما يستخدم ٠,٠٥ او ٠,٠١ .

٤- اختبار احصاءه :- وهو الاختبار المناسب لاختبار الفروض الاحصائية ، ونحدد على ضوء توزيع المعاينة للاحصاءه المستخدمة كمقدر للمعلمة المراد اختبارها وغالبا ما تعرف هذه الاحصاءه بحسب الصيغة التالية .

$$\text{احصاءة الاختبار} = \frac{\text{المقدر - القيمة المتوقعة للمقدر}}{\text{الانحراف المعياري المقدر}}$$

وهي متغير عشوائي تتغير قيمتها على ضوء تغير العينة العشوائية .

٥- جمع البيانات عن طريق العينة العشوائية من مجتمع الدراسة ثم التعويض لحساب قيمة احصاءه الاختبار والتي تسمى بالقيمة المستخرجة .

٦- تحديد القيمة الحرجة للاختبار استنادا للتوزيع الاحتمالي الى احصاءه الاختبار واعتمادا على مستوى المعنوية $\alpha$ .

٧- اتخاذ القرار بشان قبول او رفض فرض العدم $H_0$ .

بعد اختيار المنطقة الحرجة وحساب قيمة احصاءه الاختبار سيقوم الباحث باتخاذ القرار فيما اذا سيرفض او يقبل فرض $H_0$ معتمدا على نتائج التجربة فاذا وقعت النتيجة داخل المنطقة الحرجة فانه سيرفض الفرض $H_0$ باحتمال خطا $\alpha$ اما اذا وقعت النتيجة خارج المنطقة الحرجة (منطقة القبول ) فان الباحث لن يرفض $H_0$ وسوف يتحمل امكانية الوقوع بالخطا من النوع الثاني .

## الاختبارات

### ١- اختبارات تتعلق بمتوسط المجتمع $M$

**أ- التباين معلوم** $\sigma^2$

عند اختبار متوسط المجتمع $M$ والتباين معلوم $\sigma^2$ فهنالك حالتين من الممكن تطبيقها والتعامل معها وهما .

**<u>الحالة الأولى :-</u>**

لتكن $x_1, x_2 ..........., x_n$ عينة عشوائية من مجتمع يتوزع توزيع طبيعي $N \sim (M, \sigma^2)$ وكانت $\sigma^2$ معلومة فان إحصاءه الاختبار لاختيار الفرضية

$$H_0 : M = M_0$$

ضد احد الفرضيات البديلة الآتية .

$$H_1 : M \neq M_0$$
$$H_1 : M > M_0$$
$$H_1 : M < M_0$$

ستكون $\bar{x}$ هو المقدر الى $M$ ويكون توزيعه هو الاخر يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط $M$ وتباين $\frac{\sigma^2}{n}$ بغض النظر عن حجم العينة العشوائية المستخدمه وعلية ستكون احصاءه الاختبار هي كالاتي .

$$Z = \frac{\bar{x} - M_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

ولها توزيع طبيعي قياسي N~(0,1) ويتم مقارنه قيمه Z المحسوبة مع قيمتها الجدولية بمستوى دلاله $\alpha$ والتي ستحدد قيمتها على ضوء حاله الفرضية البديله .

أ- اذا كانت الفرضية البديلة $H_1 : M \neq M_0$ ويدعى هذا الاختبار باختبار من طرفين ويتم رفض $H_0$ اذا كانت $|Z| \geq Z_1 - \frac{\alpha}{2}$ وعدم رفض $H_0$ (أي قبول $H_0$ ) عكس ذلك .

ب-اذا كانت الفرضية البديلة $H_1 : M > M_0$ ويدعى اختبار من طرف واحد ويتم رفض $H_0$ اذا كانت $|Z| \geq Z_1 - \alpha$ ، وعدم رفض $H_0$ (أي قبول $H_0$ ) عكس ذلك .

ج- اما اذا كانت الفرضية البديلة $H_1 : M < M_0$ فهو الاخر يدعى باختبار طرف واحد ويتم رفض $H_0$ اذا كانت $|Z| \geq Z_1 - \alpha$ ، وعدم رفض $H_0$ (أي قبول $H_0$ ) عكس ذلك .

وعلى هذا الاساس يتم رفض H0 عندما تكون القيمة المستخرجة المطلقة اكبر من القيمة الجدولية الى Z بمستوى دلالة $\alpha$ فاذا كان الاختبار من طرف واحد نستخدم $Z_{1-\alpha}$ واذا كان الاختبارمن طرفين نستخدم $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ .

مثال:-

في احدى الدراسات اختيرت عينة عشوائية من الاسر تقطن مدينة ما فاذا كانت حجم العينة ٢٥٠ اسرة ومجموع الدخول الشهرية لهذه الاسر

١٢٢٥٠ دينار واذا علم ان توزيع الدخول في هذه المدينة يتبع توزيع طبيعي بمتوسط $M$ غير معلوم وتباين $\sigma^2 = 250$ (دينار)$^2$ . اختبر بمستوى معنوية ٠,٠٥ بان متوسط الدخل يساوي ٥٠ دينار

الحل// نلاحظ ان حجم العينة كبير وان $M$ مجهولة

يتم صياغة فرض العدم والبديل على النحو الأتي

$$H_0 : M = 50$$

$$H_1 : M \neq 50$$

والقدر المناسب لمتوسط المجتمع $M$ هو الوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ وهو

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{12250}{250} = 49 \text{ دينار}$$

وان احصاءه الاختبار ستكون $Z = \frac{\bar{x} - M_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

$$= \frac{49 - 50}{\sqrt{250 / \sqrt{250}}} = -1$$

ولكون الاختبار من طرفين فنجد $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ أي $Z_{0.975} = 1.96$ وبذلك يكون القرار بان لانرفض فرض العدم لان القيمة المطلقة المستخرجة أصغر من الجدولية وعلية فلا يوجد دليل احصائي على ان متوسط الدخول في هذه المدينة يختلف عن ٥٠ دينار .

## الحالة الثانية :-

نفرض أن العينة العشوائية $x_1, x_2, ..........., x_n$ حجمها n من مجتمع ليس بالضروري ان يكون التوزيع توزيع طبيعي ولكن حجم العينة كبير جدا $n \geq 30$ مما يمكن الباحث من استخدام نظرية الغاية المركزية والتي تظهر بان $\bar{x}$ مقدر $M$ (متوسط المجتمع) سيؤول توزيعة تقريبا الى التوزيع الطبيعي بمتوسط $M$ وتباين $\frac{\sigma^2}{n}$.

وان فرض العدم والبديل هما $H_0 : M = M_0$

هذه احدى الفرضيات البديلة $H_1 : M \neq M_0$

$$H_1 : M > M_0$$

$$H_1 : M < M_0$$

وان احصاءة الاختبار تكون $Z = \frac{\bar{x} - M_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

مثال:-

يعتقد مدير أحد مصانع البسكويت ان متوسط أجور محاله لا تختلف عن المتوسط العام للاجور في مدينة بغداد فاذا علم ان عدد العمال في مصنعه ٨١ وان متوسط اجورهم ٥٨ الف دينار وان المتوسط العام للاجور في نفس السنة في بغداد ٦٠ الف دينار وبانحراف معياري قدره ٨ الف دينار فهل تعتقد ان هذه البيانات تدعم رأي المدير . أستخدم $\alpha = 0.05$.

الحل// نصوغ اولا فرض العدم والبديله وكالاتي

$$H_0 : M = 60$$
$$H_1 : M \neq 60$$

على الرغم من عدم معرفتنا للتوزيع الاحتمالي للمجتمع ولكن لكون حجم العينة كبير =٨١ لذلك نستخدم احصاءه الاختبار Z .

$$Z = \frac{\bar{x} - M_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$
$$= \frac{58 - 60}{8 / \sqrt{81}} = -2.25$$

ولكون الاختبار من طرفين نجد $Z_{0.975} = 1.96$ وبما ان القيمة المطلقة المستخرجة أكبر من الجدولية لذا نرفض فرضية العدم وهذا يعني أن رأي المدير غير صحيح وان هنالك أختلافاً جوهرياً بين متوسط اجوره واجور مدينه بغداد العامه .

**ب-التباين غير معلوم :-**

عند اختبار متوسط $M$ والتباين مجهول ، يتطلب التقدير هذا التباين $\sigma^2$ أو التباين العينة $S^2$ وان حجم العينة هو الذي سيحدد احصاءة الاختبار حيث ان توزيع احصاءة الاختبار للعينة الكبيرة يختلف توزيعها عن احصاءة الاختبار للعينة الصغيرة وعليه ستكون لدينا حالتين هما :

**<u>الحاله الاولى :-</u>**

لتكن $x_n, \ldots\ldots\ldots x_1, x_2$ عينة عشوائية من مجتمع توزيعه طبيعي $N \sim (M, \sigma^2)$ والتباين مجهول وحجم العينة كبير جداً (n>30) يمكن عندئذُ استخدام Z وحسب نظرية الغاية المركزية والتي بموجبها احصاءه الاختبار تؤول الى ان يكون توزيعها توزيع طبيعي وكالاتي :-

$$Z = \frac{\bar{x} - M_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

حيث ان S هي مقدر $\sigma$ ويمكن حسابها حسب الصيغة الاتية

$$S^2 = \frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{n}$$

وتقارن Z المستخرجة مع Z الجدولية وبنفس الاسس السابقة معتمداً عاى حالة الفرضية البديلة حيث نستخدم هذه الاحصاءة الاختبار فرضية العدم

$$H_0 : M = M_0$$

هذه احدى الفرضيات البديلة

$$H_1 : M \neq M_0$$
$$H_1 : M > M_0$$
$$H_1 : M < M_0$$

مثال:- عقد اتفاق بين منتجي بيض المائدة واحدى مصدري البيض بهدف تصدير كمية من البيض بشرط ان لا يقل وزن البيضة عن ٦٥ غم ، وقبل تصدير الكمية المتفق عليها اختيرت عينة عشوائية قوامها ٤٩ بيضة وتبين ان متوسط البيضة في

هذة العينة كان ٦٢غم والانحراف المعياري كان ٢ غم فهل تعتقد ان المصدر سيوافق على تصدير هذه الكمية من البيض اختبر ذلك تحت مستوى معنوية ٠,٠٥ .
الحل// بما ان التباين مجهول والمعلومات تخص العينة
نحدد فرض العدم والبديل كالاتي $H_0 : M \geq 65$

$H_1 : M < 65$

وعلى الرغم من ان التباين مجهول ولكن حجم العينة كبير لذا نستخدم احصاءه الاختبار Z وكالاتي $Z = \dfrac{\bar{x} - M_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

$$Z = \frac{62 - 65}{2 / \sqrt{49}} = -10.5$$

ولكون الاختبار من طرف واحد فاننا نستخدم القيمة الجدولية الى Z بمستوى دلالة ٠,٠٥ وكانت القيمة هي $Z_{0.95} = 1.645$ وبما ان القيمة المستخرجة المطلقة اكبر من القيمة الجدولية لذا نرفض فرض العدم وهذا يعني بان المصدر سيرفض تصدير الكمية من البيض لانها غير مطابقة للمواصفات المتفق عليها .

**الحاله الثانية:-**

لتكن $x_1, x_2 ..........., x_n$ عينة عشوائية من مجتمع يتوزع توزيع طبيعي $N \sim (M, \sigma^2)$ ، التباين مجهول وحجم العينه صغير (n<30) يمكن عندئذٍ استخدام احصاءه الاختبار لاختبار متوسط المجتمع $M$ الاتية : $t = \dfrac{\bar{x} - M_0}{S / \sqrt{n}}$

حيث أن $\bar{x}$ يمثل مقدر متوسط المجتمع $M$ .

S يمثل مقدر الانحراف المعياري للمجتمع $\sigma^2$ .

والاحصاءه لها توزيع t بدرجة حرية (n-1) والاختبار فرضية العدم $H_0 : M = M_0$ ضد أي فرضية الفرضيات البديلة الاتية :

$H_1 : M \neq M_0$

$H_1 : M > M_0$

$H_1 : M < M_0$

يتم مقارنة القيمة المستخرجة الى t مع القيمة الجدولية لها بدرجة حرية n-1 وبمستوى دلاله $\alpha$ والتي ستحدد قيمتها على ضوء حاله الفرضية البديلة وكالاتي

١- اذا كانت الفرضية البديلة $H_1 : M \neq M_0$ فهذا يعني ان الاختبار من طرفين ويتم رفض $H_0$ اذا كانت $|t| \geq t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ وعدم رفض $H_0$ اذا تحقق عكس ذلك .

٢- اذا كانت الفرضية البديلة $H_1 : M > M_0$ وهذا يعني ان الاختبار من طرف واحد ويتم رفض $H_0$ اذا كانت $|t| \geq t^{n-1}_{1-\alpha}$ وعدم رفض $H_0$ أي قبولها اذا تحقق عكس ذلك

٣- اذا كانـت الفرضـية البديلـة $H_1 : M < M_0$ وهـذا يعنـي ان الاختبـار مـن طرف واحد ويتم رفض $H_0$ اذا كانت $|t| \geq t_{1-\alpha}^{n-1}$ وعدم رفض $H_0$ أي قبولها اذا تحقق عكس ذلك

وعلـى العمـوم يـتم رفـض فرضـية العـدم $H_0 : M = M_0$ ضـد أي حالـه مـن حـالات الفرضية البديلة اذا كانت القيمـة المستخرجة المطلقة الـى (t) اكبر او تساوي القيمـة الجدولية لها بمستوى دلالـه $\alpha$ ودرجة حرية n-1 ونستخدم $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1}$ اذا كـان الاختبـار من طرفين و $t_{1-\alpha}^{n-1}$ اذا كان الاختبار من طرف واحد .

مثال:-
أخذت عينـة عشوائية حجمها ١٦ شـخص من عمال احد المصانع للالبسة الجاهزة ووجد ان متوسط عدد القطـع التـي ينتجها العامل فـي اليوم الواحد هـو ٢٢ قطعـة والانحراف المعياري قطعة واحدة . اختبر فيما اذا كان مستوى الانتاج اليومي للعامل الواحد يساوي ٢٠ قطعة وبمستوى معنوية ٥%.
الحل //
في هذا التطبيق تصاغ فرض العدم والبديلة على النحو الاتي

$$H_0 : M = 20$$
$$H_1 : M \neq 20$$

ولكون حجم العينة صغير والتباين مجهول يتم استخدام احصاءه الاختبار الـى t وكالاتي :

$$t = \frac{\bar{x} - M_0}{S / \sqrt{n}}$$
$$t = \frac{22 - 20}{1 / \sqrt{16}} = 8$$

امـا القيمـة الجدوليـة الـى t بدرجـة حريـة (16-1=15) وبمـستوى دلالـه ٠,٠٥ ولكـون الاختبـار مـن طـرفين نجد قيمـة $t_{0.975}^{15} = 2.131$ القـرار بمـا ان القيمـة الستخرجة اكبر من القيمة الجدولية لذا نرفض فرض العدم $H_0$ وهذا يعنـي ان العامل لا ينتج ٢٠ قطعة يوميا حسب ادعاء صاحب المصنع .

## ٢- اختبارات تتعلق بتباين المجتمع $\sigma^2$:

ويستخدم هذا النوع من الاختبارات عندما يتطلب الأمر اختبار ادعاء يتعلق بمدى تشتت قيم الظاهرة عن وسطها أو مدى تجانسها مثلا الرغبة في معرفة مدى دقة احد المصانع في إنتاج ، أو مدى تجانس درجات اجتياز دورة ما في مجال الإدارة.....الخ لـتكن $x_n,..........x_1, x_2$ عينـة عـشوائية مـن مجتمـع يتـوزع توزيـع طبيعـي $N \sim (M, \sigma^2)$،ويتطلب اختبار فرض العدم $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ ضد احدى الحـالات الثلاثة للفرض البديل

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$
$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$
$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

وان احصاءه الاختبار لهذه الحاله تكون كالاتي

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

وان $S^2$ هي مقدر تباين المجتمع ويتم حسابه بالصيغة التالية

$$S^2 = \frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{n-1}$$

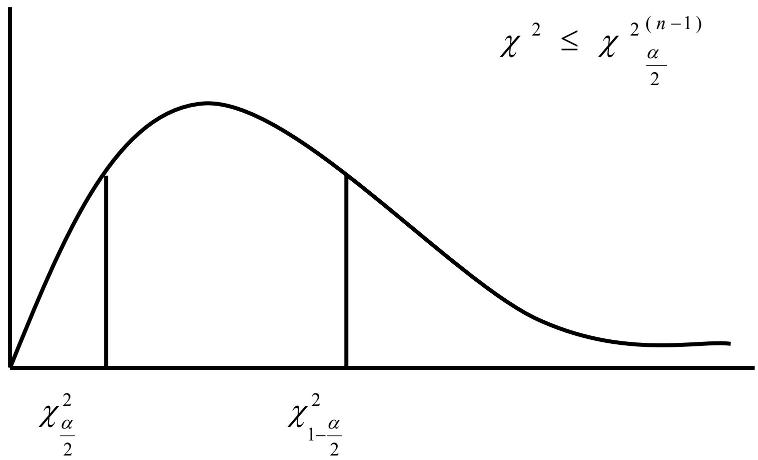
ويكون توزيع هذه الاحصاءه توزيع مربع كاي $\chi^2$ وبدرجة حرية n-1 بمستوى دلاله $\alpha$ وتقارن القيمة المستخرجة لمربع كاي مع القيمة الجدولية لها والتي ستحدد قيمتها على ضوء حاله الفرضية البديلة وكالاتي :

أ- اذا كانت $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ وهذا يعني ان الاختبار من طرفين وسيتم رفض H0 اذا كانت

$$\chi^2 \geq \chi^{2(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

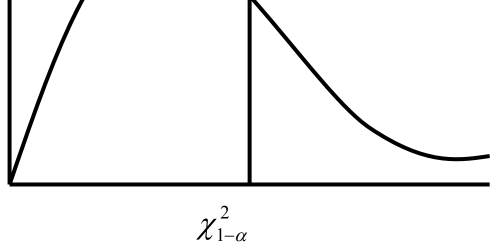
او

$$\chi^2 \leq \chi^{2(n-1)}_{\frac{\alpha}{2}}$$



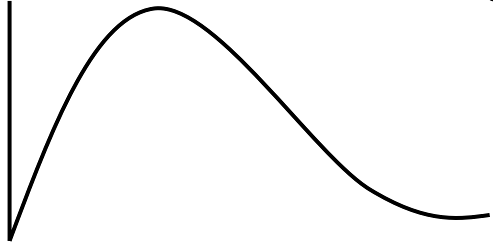

ب-اذا كان الفرضية البديلة $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ ويعتبر الاختبار في هذة الحاله اختبارمن طرف واحد ويتم رفض $H_0$ اذا كانت

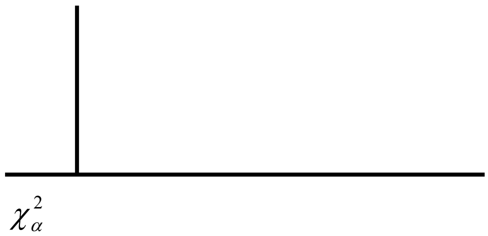
$$\chi^2 \geq \chi^{(n-1)}_{1-\alpha}$$




ت-ج- اذا كان الفرضية البديلة $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ ويعتبر الاختبار في هذة الحاله اختبارمن طرف واحد ويتم رفض $H_0$ اذا كانت

$$\chi^2 \leq \chi^{(n-1)}_{\alpha}$$






مثــال (١):- اذا كانــت رواتــب محللــي انظمــة الحاســوب يتــوزع توزيــع طبيعــي وترغـب احـدى الـشركات ان تتاكـد بمـستوى دلالــه ٠,٠٥ بـان الاختلافـات فـي الرواتب تزيد عن ٢١٠٠ دينار اخذت عينة عشوائية بحجم ٢٠ محلل انظمة فكـان الانحراف المعياري للرواتب هو ١٩٠٠ دينار

الحل// تصاغ فرض العدم والبديل لهذه المشكله كالاتي

$$H_0 : \sigma^2 = (2100)^2$$

$$H_1 : \sigma^2 > (2100)^2$$

ويتم استخدام احصاءه الاختبار $\chi^2$ لاختبار هذه الفرضيات وكالاتي :

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

$$\frac{(20-1)(1900)^2}{(2100)^2} = ١٥$$

يتم مقانه هذه القيمة مع القيمة الجدولية ولكون الاختبار من طرف واحد

$$\chi^{2(n-1)}_{1-\alpha} = \chi^{2(19)}_{0.95} = 30.1425$$

وبما ان القيمة المستخرجة اقل من الجدولية نقبل فرض العدم

مثال (٢):- تدعي أحدى الشركات لصناعة الادوية بانها تنتج دواء معين يحتوي على مادة سمية ويجب ان تكون هذة المادة محددة بشكل دقيق بحيث ان انحرافها المعياري لا يزيد عن ١,٥ ملغم ولغرض دراسه مدى دقة هذه الشركه في اضـافة هذه المـادة والـى كل حبـة مـن حبـوب الـدواء قـام المسؤولون فـي وزارة الـصحة بتحليل عينة من ٣٠ حبة فوجدوا ان الانحراف المعياري لكمية هذه المـادة الـسمية في هذه الحبوب يساوي ١,٣ ملغم . أختبـر صـحة ادعـاء الـشركة وتحـت مـستوى وتحت مستوى معنوية ٠,٠٥ . ٢

الحل// بما ان الانحراف المعياري هو ١,٥ ملغم فان التباين هو ٢,٢٥ (ملغم ).

وعليه فان فرض العدم والبديل يكتب بالشكل الاتي

$$H_0 : \sigma^2 \le 2.25$$

$$H_1 : \sigma^2 > 2.25$$

وباستخدام احصاءه مربع كاي $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

$$\frac{(30-1)(1.3)^2}{(1.5)^2} = 21.78$$

ويتم مقارنة القيمة المستخرجة اعلاه مع القيمة الجدولية الى مربع كاي وبدرجة حرية ٢٩ وبمستوى دلاله ٠,٠٥ ولكون الاختبار من طرف واحد فاننا نجد

$$\chi^{2\,(29)}_{0.95} = 42.56$$

وبما ان القيمة المستخرجة اقل من الجدولية لذا لا نستطيع رفض فرض العدم أي ان ادعاء الشركة صحيح في دقة انتاج هذا الدواء وضمن المستوى المطلوب .

**٣- أختبار يتعلق بنسبة المجتمع P :-**

ويستخدم هذا النوع من الاختبار اذا كانت نسبة المفردات التي تحمل صفة معينة في مجتمع ما هي P فمثلا نسبة الوحدات التالفة من انتاج مصنع معين ، نسبة الناجحين في امتحان الكفاءة العلمية للمتقدمين للدراسات العليا ، نسبة الراغبين في عمل معين ،نسبة الذكور من التدريسيين ....... الخ ويتم تقدير $p^{\wedge} = \frac{x}{n}$ حيث ان x تمثل عدد حالات النجاح (الحالات الملائمه لهذه الصفة ) وان n عدد المحاولات الممكنه المستقله ، ان توزيع المتغير العشوائي x توزيع ثنائي الحدين بمتوسط np وتباين npq وعليه يكون توزيع النسبة $p^{\wedge}$ توزيع ثنائي الحدين بمتوسط p وتباين $\frac{pq}{n}$ ولكن اذا كان حجم العينة كبير جدا فان $p^{\wedge}$ سيقترب توزيعها الى التوزيع الطبيعي بمتوسط p وتباين $\frac{pq}{n}$ أي $p^{\wedge} \sim N(P, \frac{pq}{n})$ .

$H_0 : p = p_0$ فرض العدم

$H_1 : p \neq p_0$ هذه احدى الحالات للفرض البديل

$H_1 : p > p_0$

$H_1 : p < p_0$

نستخدم احصاءه الاختبار والتي يؤول توزيعها الى التوزيع الطبيعي بسبب كبر حجم العينه واستخدامها لنظرية الغاية المركزية

$$Z = \frac{p^{\wedge} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

ويتم مقارنة القيمة المستخرجة الى z مع القيمة الجدولية الى z وبمستوى دلالة $\alpha$ ونحدد قيمتها على ضوء حالة الفرضيات البديلة وبنفس الاسلوب الذي اعتمدناه في حاله الاختبارات للمتوسط .

مثال(١):- يعتقد ان نظام الحوافز المعمول به في احد المصارف الاهلية يؤيده ٦٤% من الموظفين اختبر بمستوى معنوية ٠,٠٥ صحة هذا الاعتقاد علما بان عدد الذين يؤيدون هذا النظام في عينة عشوائية بسيطة تم سحبها من موظفي هذا المصرف حجمها ١٠٠ موظف هو ٦٠ موظف .

الحل// يتم تحديد فرض العدم والبديل أولا وكالاتي :-

$$H_0 : p = 0.64$$
$$H_1 : p \neq 0.64$$

يتم تقدير p وحسب الصيغة الآتية $p^\wedge = \frac{60}{100} = 0.60$

ولكون حجم العينة كبير نستخدم احصاءه z لاختبار الفرض اعلاه

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

$$Z = \frac{0.60 - 0.64}{\sqrt{\frac{(0.64)(0.36)}{100}}} = -0.83$$

وباستخدام القيمة الجدولية الى z من الجدول الطبيعي وبمستوى دلاله ٠,٠٥ ولكون الاختبار من جانبين تكون $Z_{0.975} = 1.96$ لذا لا نستطيع رفض فرضية العدم $H_0$ لكون القيمة المستخرجة المطلقة اصغر من الجدولية . وهذا يعني صحة الاعتقاد حول نظام الحوافز المعمول به حاليا .

مثال(٢):- من الدراسات السابقة وجد ان واحد من عشرة سواق تكسي يفضلون اطارات ديوانية فقامت شركة صناعه هذه الاطارات بحمله دعائية في التلفزيون هدفها الترويج وزيادة مبيعاتها من هذه الاطارات ، وللحكم على مدى نجاح هذه الحمله الدعائية اخذت عينه حجمها ٢٠٠ سائق تكسي وجد بينهم ٢٦ يفضلون هذا النوع من الاطارات . هل هذه البيانات تعطي دليلا كافيا على ازدياد نسبة الذين يفضلون اطارات ديوانية وبمستوى دلاله ٠,٠١ .

الحل// بما ان سائق التكسي يفضل او لايفضل اطارات ديوانية هذا يعني ان توزيع المجتمع هنا هو توزيع ثنائي الحدين يتم صياغة فرض العدم والبديل كالاتي :

$$H_0 : p = 0.10$$
$$H_1 : p > 0.10$$

ويتم تقدير هذه النسبة $P^\wedge = \frac{x}{n} = \frac{26}{200}$ ولكون حجم العينة ٢٠٠ لذا ستؤول هذه الاحصاءه ان تكون احصاءه الاختبار Z وكالاتي :-

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

$$Z = \frac{\frac{26}{200} - 0.10}{\sqrt{\frac{(0.10)(0.90)}{200}}} = 1.41$$

وعندها نجد قيمه z الجدولية بمستوى دلالـه ٠,٠١ ولكون الاختبار من جانب واحد فان $Z_{0.99} = 2.326$ ومع مقارنتها مع القيمة المستخرجة . لانستطيع رفض فرض العدم

لان القيمة المستخرجة المطلقة أصغر من القيمة الجدولية وهذا يعني فشل الحملة الدعائية لانها لم تزيد من نسبة التفضيل لهذا النوع من الاطارات .

مثال(٣):- عينه حجمها ٢٠٠ من احصاب السيارات في مدينة ما اوضحت ان ٤٨ منهم لديهم رخصة قيادة انتهت صلاحيتها علما بان نسبة هولاء السائقين لنظيرهم في السنه السابقة كانت ٠,٣٠ استخدم هذه البيانات للتاكد من ان نسبة السواق التي لديهم رخصة قيادة انتهت صلاحيتها قد انخفضت عما كانت عليه بمستوى دلاله ٠,٠٥ .
الحل// ان فرض العدم والبديل يكون

$$H_0 : p = 0.30$$
$$H_1 : p < 0.30$$

ويكون تقدير هذه النسبة من بيانات العينة وكالاتي $P^{\wedge} = \frac{x}{n} = \frac{48}{200}$ ولكون حجم العينة كبير يمكن استخدام احصاءه z لاختبار الفرضيه اعلاه

$$Z = \frac{p^{\wedge} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

$$Z = \frac{0.24 - 0.30}{\sqrt{\frac{(0.30)(0.70)}{200}}} = -1.85$$

ويمكن ايجاد القيمة الجدولية الىz بمستوى دلاله ٠,٠٥ ولكون الاختبار من طرف واحد نجد $Z_{0.95} = 1.645$ وبما ان القيمة المستخرجة المطلقة اكبر من الجدولية لذا نرفض فرض العدم $H_0$ وهذا يعني ان هنالك دليل على انخفاض نسبة السواق الذين لديهم رخصة قيادة انتهت صلاحيتها .

## أختبارات تتعلق بالفروق بين متوسطي مجتمعين

ويستخدم هذا النوع من الاختبارات اذا تطلب دراسة متوسطي عينتين لمعرفة ما اذا كان الفرق بينما كبير بدرجة تمكننا من القول بانهما مسحوبتين من مجتمعين مختلفين أم أن الفرق صغير بدرجة يمكن أرجاعها للصدفة .
فمثلا ترغب بالمقارنه بين نوعين من المصابيح الكهربائية أو نوعين من التغذية أو نوعين من اطارات السيارات او طريقتين من طرق التدريس او قسمين من اقسام الادارة في جامعتين مختلفتين ، او مقارنة معدلات الاجور بين المصارف الحكومية والاهلية .....الخ . وتتضمن هذه المقارنات الحالات التالية .

- الحاله الاولى:-
لتكن $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_{n1}$ عينه عشوائية حجمها $n_1$ من مجتمع يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط $M_1$ وتباين $\sigma_1^2$ وكانت $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_{n2}$ عينة عشوائية اخرى مستقلة عن الاولى حجمها $n_2$ من مجتمع يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط $M_2$ وتباين $\sigma_2^2$

وبافتراض ان $\sigma_1^2$ و$\sigma_2^2$ معروفتان وبغض النظر عن حجم العينتان .ونفرض ان $\bar{x}$ هو مقدر $M_1$ و $\bar{y}$ هو مقدر $M_2$ ولذلك فان $\bar{x}$-$\bar{y}$ هو مقدر الفرق بين متوسطي مجتمعين $M_1$-$M_2$ وان احصاءه الاختبار ستوزع توزيع طبيعي لاختبار فرضية الفرق بين متوسطي المجتمعين للفرضية البديله

$$H_0 : M_1 - M_2 = d_0$$
$$H_1 : M_1 - M_2 \neq d_0$$
$$H_1 : M_1 - M_2 > d_0$$
$$H_1 : M_1 - M_2 < d_0$$

حيث $d_0$ قيمة ثابتة قد تكون موجبة او سالبه او صفر ، وان احصاءه الاختبار حسب الصيغة التالية $Z = \dfrac{\bar{x} - \bar{y} - d_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

ويتم مقارنة القيمة المستخرجة مع القيمة الجدولية الى z وبمستوى دلالة $\alpha$ والتي تتحدد قيمتها على ضوء حاله الفرضية البديلة وكالاتي :-

أ- أذا كانت الفرضية البديلة $H_1 = M_1 - M_2 \neq d_0$

أي أن الاختبار من طرفين ويتم رفض $H_0$ اذا كانت $|Z| \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ، وعدم رفض فرضية العدم اذا تحقق عكس ذلك .

ب-أذا كانت الفرضية البديله $H_1 = M_1 - M_2 > d_0$

فيعتبر الاختبار في هذه الحاله اختبار من طرف واحد ويتم رفض $H_0$ اذا كانت $|Z| \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ، وعدم رفض $H_0$ ( أي قبول $H_1$ ) اذا تحقق عكس ذلك .

ج-اذا كانت الفرضية البديلة $H_1 = M_1 - M_2 < d_0$ وهو الاخر اختبار من جانب واحد ويتم رفض $H_0$اذا كانت $|Z| \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ، وعدم رفض $H_0$ ( أي قبول $H_1$ ) اذا تحقق عكس ذلك.

<u>مثال:-</u>

يعتقد ان المسافة الازمه لتوقف نوعين من السيارات مقاسة بالاقدام يتبع توزيع طبيعي بمتوسط $M_1$ وتباين ٧٠ (قدم ) $^2$ بالنسبة للتوزيع الاول ومتوسط $M_2$ وتباين ٧٤ (قدم) $^2$ بالنسبة للنوع الثاني من السيارات . ولغرض مقارنة مقدرة النوعين من السيارات على التوقف السريع سحبت عينتان عشوائيتان تتكون كل منهما من ١٦ سيارة من كل نوع حيث حسبت المسافة اللازمه للتوقف الكامل عند سرعة ٦٠ كم/ ساعة فتبين ان $\bar{x}_1 = 85$ قدم ، $\bar{x}_2 = 90$ قدم هل تؤدي هذه البيانات الى قبول الفرض الذي يدعي بأن سيارات النوع الاول اقل مسافة تحتاج للتوقف الكامل من سيارات النوع الثاني وعند مستوى معنوية ٠,٠٥ .

الحل// يمكن صياغة فرض العدم والبديل كالاتي

$$H_0 : M_1 - M_2 = 0$$
$$H_1 : M_1 - M_2 < 0$$

ولكـون المجتمعـات طبيعيـة والتباينـات معروفـة نـستخدم احـصاءه الاختبـار Z وكالاتي : $Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{85 - 90 - 0}{\sqrt{70/16 + 74/16}} = -1.667$

ويتم أيجاد قيمة Z الجدولية وبمستوى معنويـة ٠,٠٥ ولكون الاختبـار مـن طـرف واحد فان $Z_{0.95} = 1.645$ وعلية بمـا ان القيمـة المستخرجة المطلقـة اكبـر مـن القيمـة الجدولية لذا نرفض فرضية العدم وهذا يعني ان مسافة التوقف الكامل للسيارة من النوع الاول اقصر من مسافة التوقف الكامل للنوع الثاني .

-الحاله الثانية :-

نفرض ان عينة عشوائية حجمها $n_1$ مسحوبة من مجتمع توزيع طبيعي بمتوسط $M_1$ وتباين $\sigma_1^2$ وعينة اخرى مستقله عنها حجمها $n_2$ مسحوبة من مجتمع توزيع طبيعي بمتوسط $M_2$ وتبـاين $\sigma_2^2$، بـافتراض أن $\sigma_1^2$و $\sigma_2^2$ غيـر معلـومتين ولكنهمـا متساويتين أي

-: $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$-

نـستخدم $S_1^2$ و $S_2^2$ كمقـدرات لكـل مـن $\sigma_1^2$و $\sigma_2^2$ المجهولتـان علـى التـوالي ولكـن بافتراض ان $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ فأن كل من $S_1^2$ و $S_2^2$ سيقدران نفس المقدار وعليـة يتطلب جمعهما الحصول على مقدار واحد وكالاتي :

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

وعلى ضوء حجوم العينـات تتحدد الاحصاءه المناسبة وهنالك حاتـان أي امـا ان تكون حجوم العينات كبيرة او ان تكون صغيرة .

١- اذا كانت $n_1 + n_2 - 2 > 30$ فان احصاءه الاختبار الملائمة هي

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - d_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

حيث أن $\bar{x} - \bar{y}$ هو مقدر الفرق بين متوسطي مجتمعين يتوزعـان توزيعـا طبيعيـا . $d_0$ هو الفرق بين المتوسطين اما ان يكون موجب او سالب أو صفر .

$$H_0 : M_1 - M_2 = d_0$$
$$H_1 : M_1 - M_2 \neq d_0$$
$$H_1 : M_1 - M_2 > d_0$$
$$H_1 : M_1 - M_2 < d_0$$

ويتم مقارنه القيمة المستخرجة مع القيمة الجدولية الـى Z وبمستوى معنويـة $\alpha$ والتـي تتحدد قيمتها على ضوء حاله الفرضية البديلة وكالاتي :-

أ-أذا كانت الفرضية البديلة $H_1 = M_1 - M_2 \neq d_0$

أي أن الاختبار من طرفين ويتم رفض $H_0$ اذا كانت $|Z| \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ، وعدم رفض فرضية العدم اذا تحقق عكس ذلك .

ب-أذا كانت الفرضية البديله $H_1 = M_1 - M_2 > d_0$

فيعتبر الاختبار في هذه الحاله اختبار من طرف واحد ويتم رفض $H_0$ اذا كانت $|Z| \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ، وعدم رفض $H_0$ ( أي قبول $H_1$ ) اذا تحقق عكس ذلك .

ج-اذا كانت الفرضية البديلة $H_1 = M_1 - M_2 < d_0$ وهو الاخر اختبار من جانب واحد ويتم رفض $H_0$ اذا كانت $|Z| \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ، وعدم رفض $H_0$ ( أي قبول $H_1$ ) اذا تحقق عكس ذلك.

٢- اذا كانت $n_1 + n_2 - 2 \leq 30$ فان الاحصاءه الملائمة هي

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - d_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

أي ان الاحصاءه تتوزع التوزيع t وبدرجة حرية $n_1 + n_2 - 2$ ويتم مقارنه القيمة المستخرجة مع القيمة الجدولية الى t وبدرجة حرية $n_1 + n_2 - 2$ وبمستوى دلاله $\alpha$ وتتحدد قيمته على ضوء حاله الفرضية البديلة أختبار من طرفين او من اختبار من طرف واحد وحسب الاسس السابقة

مثال:- يرغب مدير ادارة التدريب باحدى المصانع في مقارنه تاثير طريقتين من طرق التدريب على اداء عمل معين . سميت عينتان عشوائيتان مستقلتان من العاملين بالمصنع العينة فيها ٣٦ عامل ويتم تدريب عمال احدهما باستخدام الطريقة A بينما يتم تدريب عمال الاخرى باستخدام الطريقة B . حيث يتم توزيع العمال على طريقتي التدريب باسلوب عشوائي كانت نتائج العينتين من العمال بان متوسط الوقت اللازم لاتمام العمل المطلوب وذلك بعد الانتهاء من فترة التدريب هي ٤٥ و ٥٥ دقيقة للطريقة الاولى والطريقة الثانية على التوالي وان تباين الوقت اللازم لاتمام العمل هو ٢٠٠ و ٢٧٦ (دقيقة)$^2$ على التوالي . هل هنالك دليل على ان كفاءه الطريقة A اقل كفاءه من الطريقة B مفترضا تساوي تباين الطريقتين وبمستوى دلاله ٠,٠٥ .

الحل// المقصود بالمطلوب هو هل هنالك دليل على ان الطريقتين مختلفتين وبالتالي فن فرضية العدم والبديلة هي

$$H_0 : M_1 = M_2$$

$$H_1 : M_1 < M_2$$

او نستطيع ان نصيغ فرض العدم والبديل كالاتي

$$H_0 : M_A.M_B = 0$$

$$H_1 : M_A.M_B < 0$$

من المعلومات المتوفرة على الرغم من تساوي التباين ولكنهما مجهولان مما يمكن تقديرهما وكالاتي:

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$\frac{35(200)+35(276)}{36+36-2} = 238 \quad \text{(دقيقة)}^{٢}$$

ولكون العينتين الاولى والثانية اكبر من ٣٠ لذا يمكن استخدام احصاءة الاختبار Z وكالاتي :

$$Z = \frac{\bar{x}-\bar{y}-d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{45-55}{\sqrt{238(\frac{1}{36}+\frac{1}{36})}} =$$

ويتم ايجاد القيمة الجدولية بمستوى دلاله ٠,٠٥ ولكون الاختبار من طرف واحد

$$Z_{0.95} =$$

مثال:- انتجت شركة الاصباغ الحديثة نوعية من الطلاء ولغرض المقارنة بين هذين الطلائين اخذت عينة عشوائية حجمها ٤ علبة من النوع الاول حجم العلبة غالون واحد ، وجد انها تطلي في المعدل ٥٤٦(قدم)[٢] وبانحراف معياري قدره ٣١ (قدم)[٢] . أما العينة الثانية فكانت بحجم ٤ علبة ايضا من النوع الثاني وجد انها تطلي من الحيطان في المعدل ٤٩٢ (قدم)[٢] وبانحراف معياري قدره ٢٦ (قدم)[٢] ،مفترضين أن مجتمعات علب الطلاء تتوزع توزيع طبيعي للنوعين وبتباينات متساوية هل هنالك دليل على ان الطلاء من النوع الاول افضل من الطلاء من النوع الثاني وبمستوى دلاله ٠,٠٥ .

نضع فرض العدم والبديل كالاتي

$$H_0 : M_1 = M_2$$
$$H_1 : M_1 > M_2$$

ولكون حجوم العينات صغيرة والتباينات مجهوله ومتساوية نستخدم احصاءة t وكالاتي

$$t = \frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$= \sqrt{\frac{3(31)^2+3(26)^2}{4+4-2}} = 38.609$$

وبالتعويض في صيغة t نحصل على الأتي

$$t = \frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

$$= \frac{546-492}{28.609\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} = 2.67$$

ولكون الاختبار من طرف واحد فنجد احصاءه t من جداول توزيع t وبدرجة حرية $n_1 + n_2 - 2 = 4 + 4 - 2 = 6$ أي $t_{0.95}^{6} = 1.943$ ، وبما أن القيمة المستخرجة المطلقة أكبر من الجدولية لذا نرفض فرض العدم وهذا يعني ان الطلاء من النوع الاول هو افضل من النوع الثاني حيث يستطيع ان يطلي اكبر مساحة من الثاني .

- الحالة الثالثة :-

لنفرض عينتان عشوائيتان مستقلتان مسحوبتان من مجتمعين طبيعيين $N(M_1, \sigma_1^2), N(M_2, \sigma_2^2)$ وان $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ غير معلومتان ولا متساويتان $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ عندئذٍ يمكن اعتبار $S_1^2$ مقدر الى التباين $\sigma_1^2$ و $S_2^2$ مقدر الى التباين $\sigma_2^2$ في هذه الحاله يجب تمييز بين حالتين وهي عندما يكون حجوم العينات كبيرة وحجوم العينات صغيرة حيث تختلف احصاءة الاختبار باختلاف ذلك .

١- حاله العينات الكبيرة :-

عندما تكون العينات المسحوبة من المجتمعات كبيرة $n_1 \geq 30, n_2 \geq 30$ فان احصاءة الاختبار في هذه الحاله تؤول الى التوزيع الطبيعي Z وكالاتي

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - d_0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$$

ويتم مقرنه Z المستخرجة من الصيغة اعلاه مع القيمة الجدولية اليها وبمستوى $\alpha$ وتتحدد قيمتها على ضوء حاله الفرضية البديلة لهذا الاختبار فيما اذا كان اختبار من طرف واحد او من طرفين وبنفس الاسس والقواعد السابقة .