الاستدلال الإحصائي

نظرية التقدير :-

تعتمد التوزيعات الإحصائية على معلمات وعادة ما تكون مجهولة والهدف هو تقدير هذه المعلمات .

ولغرض تقدير هذه المعلمات يمكن استخدام العينة للحصول على قيمة تقدير للمعلمة الخاصة بالمجتمع . وهنالك خصائص معينة يمكن اعتمادها للوصول إلى القدر الجيد مثل عدم الانجاز (عدم التميز) أو الاتساق أو الكفاءة والى أخره من الخواص التي يمكن من خلالها الحكم على تقدير المعلمة جيد أو لا .

وعلى كل حال ينقسم التقدير إلى قسمين التقدير النقطي:- وهو التقدير الذي من خلاله نحصل على قيمة معينة لتقدير المعلمة والتقدير بفترة :- وهي إن توجد فترة ثقة للمعلمة المراد تقديرها .وفيما يلي استعراض موجز للتقديرين

١-**التقدير النقطي (point estimation):-** وهو التقدير الذي يمثل بنقطة او قيمة محدده مثل الوسط الحسابي او الانحراف المعياري .

مثلاً(١) :-$\bar{x}$ يعتبر تقدير نقطي لوسط المجتمع M .

S^2 يعتبر تقدير نقطي لتباين المجتمع σ^2

مثال(٢):- لو فرضنا عينة عشوائية مؤلفة من ٦ وحدات هي (١،٢،٤،٥،٧،١١) مسحوبة من مجتمع معلماته غير معروفة فان الوسط الحسابي للعينة $\bar{x}=5$ هي التقدير النقطي لمتوسط المجتمع غي المعلوم M .

واذا افترضنا ان نسبة عدد القيم الزوجية للعينة p هي مقدار للنسبة في المجتمع p فان $p=1/3$ هو التقدير النقطي لنسبة المجتمع p .

٢- **التقدير بفترة (Internal estimation):-** ويقصد به الفترة التي تشمل قيمة المعلمة المجهولة باحتمال معين ويسمى هذا الاحتمال (معامل الثقة) فعندما يقال ان معامل الثقة ٩٥% فهذا يعني ان هنالك فرصة ٩٥ من ١٠٠ بان الفترة تظم قيمة معلمة المجتمع ، و٥ % تكون قيمة المعلمة خارج المجتمع .

فتره الثقة لمتوسط المجتمع M .

١- فترة الثقة M عندما σ^2 معلومة :-

عند اختيار عينة عشوائية بحجم n من مجتمع طبيعي تباين σ^2 وهو معلوم فان متوسط العينة $\bar{x}$ يتوزع توزعاً طبيعيا بمتوسط M وتباين σ^2 /n لذلك فان الاحصاءه

$$Z=\frac{\bar{x}-M}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$z \sim N(0,1)$ تتوزع توزيع طبيعي قياسي

لذا فأن:-

$$p(-Z_{1-\alpha/2} \le \frac{\bar{x}-M}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z_{1-\alpha/2})$$

$$p(-Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{x}-M \le Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\sigma$$

$$p(\bar{x}-Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le M \le \bar{x}+Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\sigma$$

وهذا يعني إن فترة الثقة لمتوسط المجتمع M هي $(\bar{x}-Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ، \bar{x}+Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
بمعامل ثقة $1-\sigma\%$ حيث ان $Z_{1-\alpha/2}$ هي القيمة الجد ولية للتوزيع الطبيعي القياسي.
فإذا كانت $\sigma = 0.10$ فان فترة ثقة M بمعامل ثقة ٩٠% هي:

$$(\bar{x}-Z_{0.90}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ، \bar{x}+Z_{0.90}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

وتسمى هذه بفترة الثقة ذات الجانبين .
أما فترة الثقة ذات الجانب الواحد فنأخذ σ كما هي أي ان الحد الأعلى للفترة والحد الأدنى .

$$P(\cdot < M < \bar{x}+Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\sigma$$

$$p(\bar{x}-Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < M < 0) = 1-\sigma$$

مثال(١):-
مجتمع يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط غير معلوم M وانحراف معياري (١١) سحبت منه عينة عشوائية حجمها ٢٦ وكان متوسط العينة ٤٨. أحسب تقدير فترة متوسط المجتمع M بثقة مقدارها ٩٥%.
الحل// نجد اولا فترة ثقة M

$$Z_{1-\alpha/2} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{0.925} = 1.96$$

$$\bar{x}-Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < M < \bar{x}+Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$48-1.96\frac{11}{\sqrt{26}} < M < 48+1.96\frac{11}{\sqrt{26}}$$

$$43.77 < M < 52.23$$

أي عند احتمال ثقة مقدارها ٩٥% ستكون قيمة M ضمن الفتره اعلاه.
مثال(٢):-

سحبت عينة عشوائية حجمها ٦ وحدات (٥،٣،٧،٩،١٠،٨) من مجتمع يتوزع طبيعيا بمتوسط M وانحراف معياري ١,٨ ماهو تقدير متوسط المجتمع M بثقة مقدارها ٩٠%.

الحل // نحسب اولا الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 7$

$$\overline{x} - Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < M < \overline{x} + Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{x} - Z_{0.95} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < M < \overline{x} + Z_{0.95} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$7 - 1.65 \frac{1.8}{\sqrt{6}} < M < 7 + 1.65 \frac{1.8}{\sqrt{6}}$$

(5.78 , 8.21)

٢- فترة ثقة M عندما σ^2 غير معلومة

إذا كان تباين المجتمع الطبيعي مجهول فيتم تقديره من خلال تباين العينة وفي هذه الحالة تكون الاحصاءه $t = \frac{\bar{x} - M}{S/\sqrt{n}}$. تتوزع حسب توزيع t بدرجة حرية n-1 بشرط أن يكون حجم العينة صغير أقل من ٣٠ أي (n<30) اما فترة الثقة M فتكون

$$\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} < M < \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$$

مثال(١):-

عينة عشوائية حجمها ١٦ مسحوبة من توزيع طبيعي فاذا كان متوسط العينة $\bar{x} = 10.3$ وانحرافها المعياري S=3 . اوجد فتة الثقة لمتوسط المجتمع M بمعامل ثقة ٩٠%.

$$\bar{x} - t_{0.95}(15) \frac{S}{\sqrt{n}} < M < \bar{x} + t_{0.95}(15) \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$10.3 - 1.75 \frac{3}{4} < M < 10.3 + 1.75 \frac{3}{4}$$

$$8.98 < M < 11.62$$

بمعامل ثقة ٩٠%

مثال (٢):-

أوجد فترة الثقة لمتوسط المجتمع الطبيعي والتي سحبت منه عينة عشوائية بحجم ١٠ وكانت وحداتها (١٢،١٣،٥،٨،٦،١١،١٥،١٠،٧،٨) بمعامل ثقة ٩٥%.

الحل// نجد أولا $\bar{x} = 9.5$ ، S=3.24

$$\bar{x} - t_{0.975}(9) \frac{S}{\sqrt{n}} < M < \bar{x} + t_{0.975}(9) \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$9.5 - 2.262 \frac{3.24}{\sqrt{10}} < M < 9.5 + 2.262 \frac{3.24}{\sqrt{10}}$$

(7.2<M<11.8)

الباحث الأقدم
حسين علي عبدالله اليعقوبي
العراق/ جامعة ذي قار / مركز أبحاث الأهوار

الملف برعاية موقع جزيرة الرياضيات www.hesab.net